مثال: وظيفة

ماعلاقة الدالة ذات ت.م بتكاملها ريمان لهذه الدالة على فترة ما.

مثال: وظيفة

ماعلاقة متتالية كوشي في الدالة او مفهوم الدالة محدودة التغير.

تعريف:

عرف تقارب متتالية عددية.

الحل: اذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ ; \ \forall n \geq N(\varepsilon) : |x_n - x_0| < \varepsilon .$$

سؤال:

ماعلاقة الاستمرار بالاستمرار المنتظم.

كل مستمرة بانتظام هي مستمرة على أي فترة أما المستمرة بانتظام على فترة مغلقة و محدودة حكماً فتكون مستمرة بانتظام. $f \in C[a,b]$

مثال: الدالة: $f:]0,1[\longrightarrow \frac{1}{x}$ مستمرة ولكن ليست مستمرة بانتظام لأن الاستمرار المنتظم يدرس على كامل الفترة.

تعريف متتالية كوشي:

نقول عن المتتالية $\{x_n\}$ أنها كوشية أو أساسية أو متقاربة في نفسها إذا كانت:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ ; \ n, m > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon .$$

نستطيع من هنا معرفة تقارب المتتالية حيث لا علاقة لنا سوى بالحد العام.

مثال: $x_n = \frac{1}{n}$ حيث $n \geq 1$ كوشية أو متقاربة في نفسها

في $\mathbb{R}$ قد تكون غير كوشية في فضاءات أخرى. حيث تحقق:

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon \ ; \ m > n .$$

إلا أنه في الفضاء $(0,1)$ ليست كوشية. لأن $0 \notin$ الفضاء هنا.

تعريف الدالة المحققة لشرط ليبشتز Lip:

يقال عن الدالة f المعرفة من $[a,b]$ أي $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ أنها تحقق شرط ليبشتز من المرتبة k على الفترة $[a,b]$ أي Lip_k اذا وجد عدد ثابت $L > 0$ بحيث أن: $f(x) - f(y) \leq L|x-y|$ حيث $x, y \in [a,b]$. (*)

ملاحظة:

في هذا التعريف اذا كان $k = 1$ فيقال عن الدالة عندئذ إنها ذات ت.م على الفترة $[a,b]$

وإذا كان $k=0$ يقال عن الدالة أنها محدودة عليها. أي:

$$|f(x)-f(y)| \le L|x-y| \; ; \; x, y \in [a,b]$$

f ذ.ت.م عليها.

لنقوم الآن على إثبات أن كل دالة تحقق شرط Lip هي ذ.ت.م على $[a,b]$ حيث أن $k=1$.

الإثبات: لدينا الدالة f تحقق شرط Lip.

مباشرة تجزئة ومجموع.

لتكن

$$P=\{a=x_0, x_1, \dots, x_n=b\}$$

تجزئة لـ $[a,b]$ ولنشكل المجموع:

$$v(f;P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| \underset{Lip}{\le} L\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_{k-1}|$$

$$= \underbrace{L(b-a)}_{\text{عدد محدود}}$$

وهذا يعني أن الدالة f ذ.ت.م على الفترة $[a,b]$ ومن

يكون تغيرها الكلي:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sup_{P\in \mathbb{P}}\{v\} \le L(b-a)$$

حيث: $\left(\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \ge 0\right)$.

ملاحظة:

كل دالة تحقق شرط ليبشتز على الفترة $[a,b]$ هي ذ.ت.م وزد على ذلك هي مستمرة بانتظام على تلك الفترة وأيضاً مستمرة عليها.

ملاحظة:

الفترة $[a,b]$ نقصد بها أي مغلقة ومحدودة.

مثال:

الدالة $y=g(x)=\sqrt{x}$ هي دالة ذ.ت.م ومستمرة بانتظام على الفترة $[0,1]$ إلا أنها لا تحقق شرط ليبشتز.

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \nleq L|x-y|.$$

لا نستطيع إيجاد L يحقق الشرط.

كون $x, y \ge 0$

$$\underset{x\to 0}{\frac{1}{x}} \to \infty \implies \text{لا يمكن إيجاد } L$$

الدوال المستمرة مطلقاً : $AC_{[a,b]}$.

هذه المجموعة من الدوال سنبين أنها مجموعة جزئية فعلية من الفضاء الجزئي (فضاء الدوال ذات ت م) (BV) على الفترة $[a,b]$ أي :

$$AC_{[a,b]} \subsetneq BV[a,b] .$$

وتطبيقاتها واستخداماتها كثيرة .

تعريفها :

ليكن لدينا $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ والمحدودة على $[a,b]$. يقال عن هذه الدالة المحدودة إنها مستمرة مطلقاً أو باطلاق عليها إذا تحقق إذا كان : من أجل أي $\varepsilon > 0$ علينا إيجاد :

$$\exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \; ; \; \sum_{k=1}^{n} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| < \varepsilon \quad (1)$$

من أجل أي أسرة $/n/$ منتهية من الفترات الجزئية $]a_k , b_k[$ من $[a,b]$ $(1 \le k \le n)$. والمنفصلة مثنى مثنى ومجموع أطوالها :

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \quad (2)$$

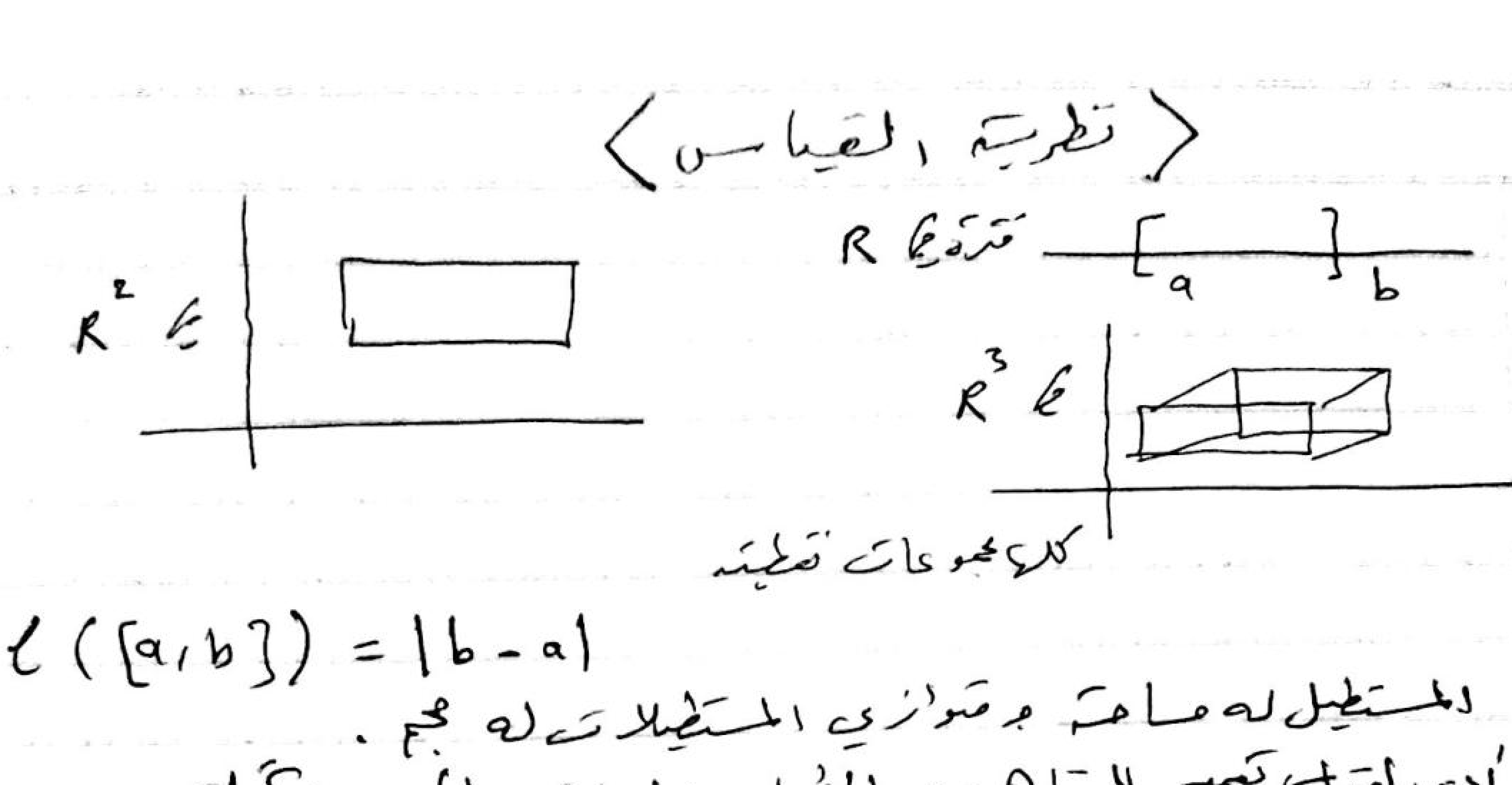
ونرمز لهذا النوع من الدوال بالرمز $AC_{[a,b]}$ ونكتب مثلاً :

$$f, g, h, \dots \in AC_{[a,b]} .$$

مثال للحل :

أثبت أن الدالة $h(x) = \sin x$ مستمرة باطلاق على الفترة $[0, \frac{\pi}{4}]$ بطريقتين مختلفتين وهل تحقق شرط ليبشتز عليها وهل هي ذ. ت. م عليها .

〈 نظرية القياس 〉



$\ell([a,b]) = |b-a|$

المستطيل له مساحة ومتوازي المستطيلات له حجم.

أي القياس تعميم للمفاهيم: الطول - المساحة - الحجم - الكتلة , ...

- هدفنا في هذا الجزء من المقرر هو تقديم مدخل إلى نظرية القياس.

إن المفهوم الرياضي للقياس الموجب (غير السالب) ما هو إلا تعميم لمفاهيم الطول (طول الفترات) والمساحة (المستطيلات) والحجم والكتلة والشحنة الكهربائية وغير ذلك كثير.

ففي المجموعة R ($x' \to x$) نلحق كل فترة طولها:

$\ell([a,b[) = |b-a|$

وفي المستوي R^2 نلحق مستطيل بمساحته وفي $\mathbb{R}^3$ متوازي المستطيلات بحجمه وفي الميكانيك نلحق جسم بكتلته وفي الفيزياء نلحق حيز الشحنة الكهربائية التي يشتمل عليها.

إذاً مفهوم القياس في الفضاء الاقليدي هو تعميم للمفاهيم الأولية عن طول الفترات ومساحة المستطيلات وحجوم متعددة الوجوه (متوازي المستطيلات).

فمثلاً ما طول المجموعة $\{\dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ نقول قياس هذه المجموعة.

1) تعريف الجبر:

لتكن $X \neq \emptyset$ مجموعة ما اختيارية (لو كتبنا $\{\emptyset\}$ لا تصبح مجموعة مجموعات) بغض النظر عن طبيعتها تسمى المجموعة بوساطته ونرمز لـ $2^X = P(X)$ أسرة أو جماعة كل المجموعات الجزئية من X بما فيها المجموعة X والخالية.

مثلاً: $X = \{1,2\}$

$P(X) = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \emptyset\}$.

نقول عن صف المجموعات (مجموعة مجموعات (جماعة)) $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ غير الخالي إنه جبر على X إذا حقق

مايلي :

$G_1)$ $\emptyset, X \in \mathcal{A}$

$G_2)$ if $E, F \in \mathcal{A} \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{A}$.

ويمكن تعميم ذلك على n مجموعة لنحصل على أن :

if $E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$.

أي أنه مغلق بالنسبة لعملية الاتحاد لعدد المنتهي وبشكل خاص من أجل مجموعتين.

$G_3)$ if $E \in \mathcal{A} \Rightarrow \tilde{E} = E^c \in \mathcal{A}$.

متممة E.

أي $E \cup \tilde{E} = X$.

أي أن $\mathcal{A}$ مغلق بالنسبة لعملية التتميم.

مثال:

اذا كانت $X = \{1, 2\}$

$P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, X\}$

مثال:

لتكن $E \subset X$ عندئذ الصف :

$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{A}_2 = \{X, E, \tilde{E}, \emptyset\}$

$\mathcal{A}_3 = P(X)$. X: مجموعة أجزاء مجموعة.

كل من $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ جبر لتحقيق التعريف بينما الصف:

$\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \tilde{E}, X\}$

ليس جبراً لأنه ليس مغلقاً بالنسبة لعملية التتميم.

مثال:

أوجد كل الجبور على X حيث $X = \{1, 3\}$

مثال: وصف المجموعات

هل صف المجموعات المحدودة، المغلقة في $X = \mathbb{R}$ جبر أم ماذا مع التعليل.

الجبر التام (سيجما - جبر):

نقول عن الجبر $S = A \supseteq P(X)$ إنه جبر تام أو σ-جبر على X إذا وفقط إذا كان مغلقاً بالنسبة للاتحاد المعدود غير المنتهي أي إذا حقق الشرط:

$$E_1, E_2, \dots, E_n \in A = S \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in A = S.$$

نعني هنا بـ S جبراً تاماً بدلاً من A

- نسمي الثنائية (X, S) فضاءً قياسياً أو فضاءً قابلاً للقياس وكل عنصر من S نسميه مجموعة مقيسة.

مثال:

إذا كانت الصفوف التالية $S_1 = P(X)$, $S_2 = \{\emptyset, X\}$
$S_3 = \{\emptyset, X, E\}$

أي منها جبر تام ولماذا؟

S_1: نلاحظ أن $\emptyset, X \in S_1$ مغلقة بالنسبة للاتحاد غير المنتهي و التتميم بالتالي جبر تام وكذلك S_2 أما S_3 ليس لأنه غير مغلق بالنسبة للتتميم. $\tilde{E} \notin S_3$.

ملاحظة:

كل جبر تام على X هو جبر إلا أن العكس غير صحيح بالضرورة.

وعليه فإن صف الفترات المفتوحة في IR أو على $X = \mathbb{R}$

$$\{(a,b) \; ; \; -\infty < a < b < \infty\}.$$

ليست جبراً فهل يمكن أن تكون جبراً تاماً؟

متممة المفتوحة مغلقة وهي غير موجودة لدينا فهي غير مغلقة بالنسبة للإتمام كذلك يوجد $]0,1[\,,\,]2,3[$ اتحادهما ليس من صف الفترات المفتوحة. ليس بالضرورة أن اتحاد فترتين مفتوحتين فترة مفتوحة إنما هي مجموعة مفتوحة - أي:

- ليست جبراً من باب أولى ألا يكون هذا الصف جبراً تاماً لأنه ليس مغلقاً بالنسبة لعملية الاتحاد المنتهي أو غير المنتهي (المعدود على الأكثر) و غير مغلق بالنسبة لعملية الإتمام، حيث المتممة هي مغلقة في IR.

تذكر:

اتحاد أو اجتماع فترتين مفتوحتين ليس بالضرورة فترة مفتوحة بل هي مج مفتوحة.

Scanned by CamScanner

مثال: $]a \quad [b \quad]c \quad [d$ لأنه ليس كل تقاطعاتها داخلية.

ملاحظة:

كل من التقاطع المعدود المنتهي والاتحاد المعدود غير المنتهي أي:

$\bigcap_{k=1}^{n} E_k \in$ الجبر ، $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in$ الجبر التام

حسب خواص دي مورغان.

ويقال أيضاً اذا كانت E, F من الجبر (A) أو الجبر التام σ فمن الواضح أن: $E - F = E \setminus F$, $E \cap F$ (أي أن كل منهما مغلق بالنسبة لعملية الفرق والتقاطع).

③ الصف المطرد:

(*1) نسمي متتالية من المجموعات متزايدة اذا حققت الشرط: $\{E_n ; n \geq 1\}$

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_n \subseteq \dots$$

وعندها يكون $\lim_{n \to \infty} E_n = \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} E_n$ ①

أي المتتالية متقاربة (نهائية). وتسمى الحدود عن التزايد تماماً فقط نكتب عندها $E_1 \subset E_2$.

(*2) نسمي هذه المتتالية متناقصة اذا حققت الشرط:

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots \supseteq E_n \supseteq \dots$$

عندها يكون بالتعريف: ② $\lim_{n \to \infty} E_n = \bigcap_{n \geq 1}^{\infty} E_n$

وهكذا من أجل التناقص تماماً: $E_1 \supset E_2 \supset \dots$

(*3) تسمى المتتالية مطردة اذا كانت واحدة من هذه الأربعة (متزايدة، متزايدة تماماً، متناقصة، متناقصة تماماً).

مثال:

أوجد:

1) $\lim_{n \to \infty} [0, n[$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} [n, +\infty[$

لدينا:

$[0,1[\subset [0,2[\subset \dots \subset [0,n[\subset \dots$

بالتالي متزايدة تماما ويكون لدينا:

$$\lim_{n \to \infty} [0,n[= \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} [0,n[\qquad E_n = [0,n[\quad n \geq 1$$

$$= [0, \infty[$$

وبالتالي فهي متقاربة.

بينما من أجل ② متناقصة تماما لدينا:

$[1, \infty[\supset [2, \infty[\supset \dots$

فهي متقاربة ونهايتها:

$$\lim_{n \to \infty} [n, +\infty[= \bigcap_{n \geq 1}^{\infty} [n, \infty[$$

$$= \emptyset$$